



# ریاضی ۱

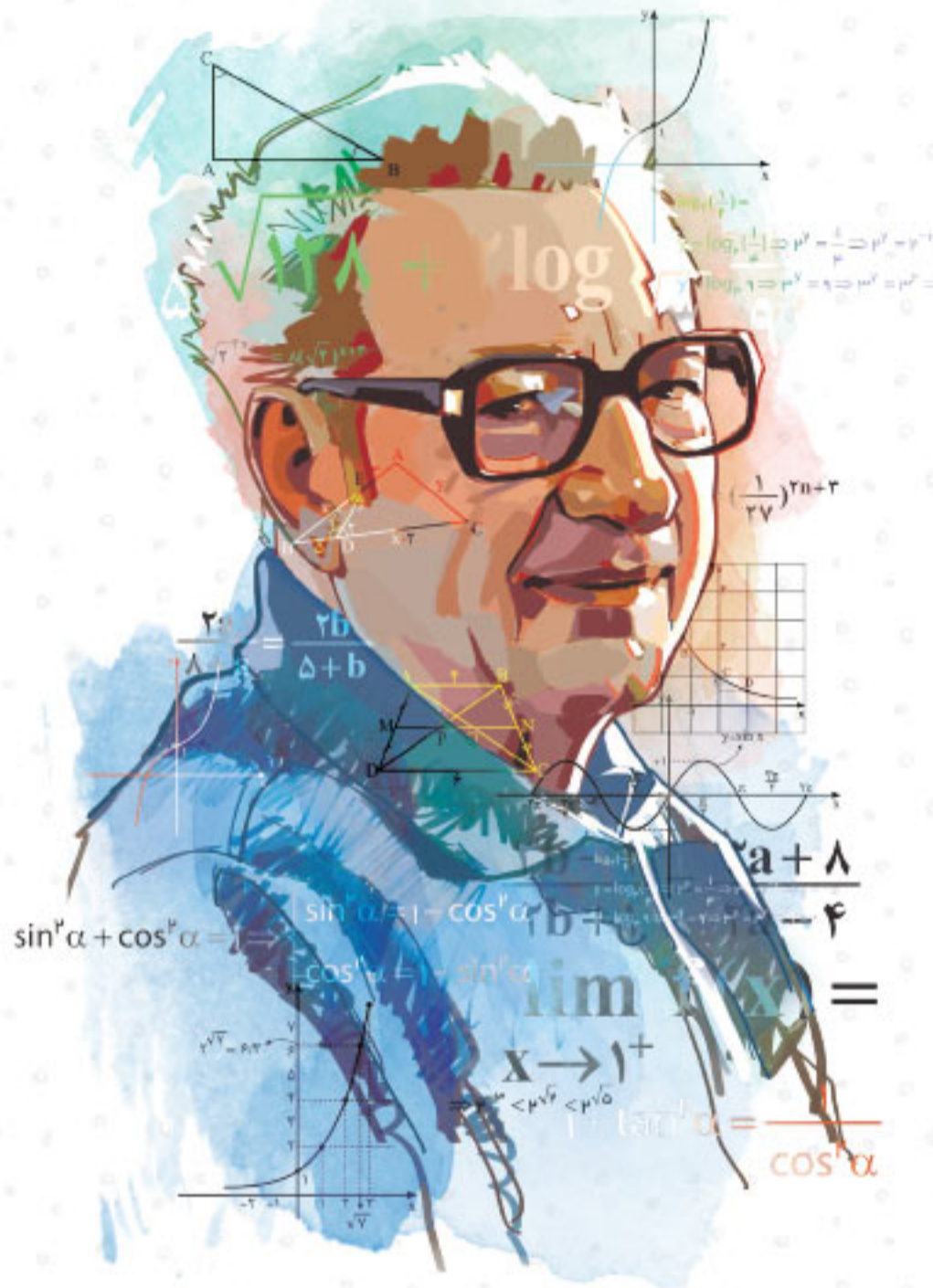
پاورتست  
PowerTest

دهم

• عباس اشرفی • وهاب تقی زاده • مصطفی دیداری  
• مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی  
• مشاور علمی: استاد هوشنگ نظری



مهروماه



## تقدیم به استاد پرویز شهریاری

پرویز شهریاری (۲ آذر ۱۳۰۵، کرمان - ۲۲ اردیبهشت ۱۳۹۱، تهران) ریاضی‌دان و از چهره‌های ماندگار در زمینه دانش و آموزش ایران است.

دوران کودکی شهریاری دوران سختی از نظر معیشتی بود. او تا سال سوم دبیرستان را در دبیرستان ایرانشهر در شهر کرمان گذراند و وارد دانشسرای مقدماتی کرمان شد. در خرداد ۱۳۲۳ دانش‌آموخته شد و برای ادامه تحصیل به تهران آمد. در تهران در سال ۱۳۳۲ در رشته ریاضی در دانشکده علوم دانشگاه تهران دانش‌آموخته شد. پس از آن یک سال در شیراز آموزگار بود. در ۱۳۳۳ به تهران بازگشت و به فعالیت‌های درخشان علمی و آموزشی خود ادامه داد. استاد پرویز شهریاری سرانجام در ۸۶ سالگی و در روز جمعه ۲۲ اردیبهشت ۱۳۹۱ به علت مشکل تنفسی در بیمارستان جم تهران زندگی را بدرود گفت.

**فعالیت‌ها:** ■ انتشار نشریاتی چون اندیشه ما، وهومن و چیستا، آشتی با ریاضیات (بعدها: آشنایی با ریاضیات) و سردبیری مجله دانشمند ■ تأسیس دبیرستان‌های خوارزمی، مرجان و مدرسه عالی اراک ■ تالیف کتاب‌های ریاضی و هم‌زمان با آن تالیف و ترجمه صدها کتاب در تاریخ و آموزش ریاضیات ■ انتشار ماهنامه «اندیشه ما» ■ تهیه یک دوره کتاب درسی ریاضی دوره اول دبیرستان ■ راه‌اندازی اولین کلاس کنکور در ایران با نام گروه فرهنگی خوارزمی ■ تأسیس و ثبت بنیاد فرهنگی پرویز شهریاری

# مقدمه



«روزی یکی از دانشجویان دکتر حسابی به ایشان گفت: شما سه ترم است که مرا در این درس رد می‌کنید. من که نمی‌خواهم موشک هوا کنم! می‌خواهم در روستایمان معلم شوم.»

پروفسور حسابی جواب داد: تو اگر نخواهی موشک هواکنی و فقط بخواهی معلم شوی، قبول! ولی تو نمی‌توانی به من تضمین بدهی که یکی از شاگردان تو در روستا، نخواهد موشک هوا کند!»

امیدوارم تو از اون دسته دانش‌آموزانی باشی که بخواهی موشک هوا کنی!

امیدوارم سقف آرزوهای اونقدر بلند باشه که دچار روزمرگی نشی!

و امیدوارم بدونی برای موشک هواکردن، بیشتر به همت بلند نیازه تا هوش و استعداد!

هنوز سال دهم هستی، حتی اگه تا حالا هم ریاضی رو خوب نخوندی فرصت هست!

سه سال تا کنکور فاصله داری و خیلی کارها می‌تونن بکنن. توی این مدت امکانش رو داری به حال اساسی به اوضاع ریاضیات بدی.

بذار به مثال واقعی از شاگردهام برات بزنم. چند سال پیش علیرضا صحاف با معدل سیزده و با نمره ریاضی «ده» وارد دبیرستان شد. اون موقع دبیرستان ۴ ساله بود.

اول دبیرستان ریاضی رو افتاد. 😞 اما توی سه سال آخر شروع به درس خوندن کرد. نمره ریاضیاتش شروع به رشد کرد. سال بعد ۱۶، سال بعدش ۱۸ و سال آخر هم درخشید و الان دانشجوی مهندسی کامپیوتر دانشگاه شریفه!

اگر بخواهی می‌تونن مثل علیرضا توی این چند سال آخر، غول ریاضی رو مهار کنی و شاخ اونو بشکنی. البته برای این کار باید زحمت بکشی و ابزار مناسب هم داشته باشی.

یکی از چیزهایی که می‌تونه کمکت کنه کتاب کمک آموزشی خوبه! یعنی همین کتاب! 😊

ما خیلی تلاش کردیم این کتاب طوری نوشته شه که مطالب از ساده به دشوار چیده بشن تا اول کار، از ریاضی زده نشی.

تست‌ها رو دستچین کردیم و دونه، دونه اون‌ها رو بررسی کردیم و بعد از مطمئن شدن از کیفیت مهروماهی، اجازه ورود به کتاب رو بهشون دادیم.

پاسخنامه‌ها رو تا اونجا که می‌شده تشریحی و کامل نوشتیم، حتی براشون روش دوم و سوم آوردیم.

## ویژگی‌های این کتاب

۱ درسنامه‌های جامع و مفهومی داره! هم مطالب کتاب درسی توش هست و هم مطالب عمیق‌تر.

۲ طبقه‌بندی موضوعی شده، یعنی درس‌نامه‌های هر فصل به بخش‌های سلولی تقسیم شده تا مجبور نشی کل فصل رو به جا بخونی!

۳ اصلاً به مطالب خارج از کتاب درسی نپرداخته، موضوعات فضایی (که نه به درد این دنیا می‌خوره، نه به درد اون دنیا) رو تو کتاب راه ندادیم. باور کن برای دعوت هر کدوم از موضوع‌ها به کتابمون، کلی جلسه گذاشتیم و بحث کردیم. خیلی کار سختی بود ولی می‌ارزید.

۴ توی محدوده مطالب کتاب درسی، عمق مطالب در حد چاه عمیقه، یعنی تهش رو برات درآوردیم. با خیال راحت بخونش و مطمئن باش هیچی جا نمونه.

۵ هیچ مطلبی رو بدون مثال برات باقی نذاشتیم. همه مثال‌هامون هم از فیلتر استادای عالی و باتجربه گذشتن و بعدش به همشون به طور کامل و آموزشی جواب دادیم.

۶ پُر از تست‌های دوست‌داشتنی! تست‌ها رو هم از ساده به سخت چیدیم که اولش با دیدن به تست سخت، سخته نکنی 😊 و از ریاضی فراری نشی.

۷ همه تست‌های کنکورهای جدید، حتی کنکور امسال! تو کتابمون هست، البته فقط تست‌هایی را آوردیم که مربوط به کتاب جدید.

۸ پاسخ‌نامه‌ش پُر از راهبردهای عالی! این راهبردها مثل GPS می‌مونن. به کمک اون‌ها، توی حل سؤال‌ها گیر نمی‌کنی و می‌دونن که چه مسیری رو باید دنبال کنی. پاسخ‌نامه این کتاب به جز راهبرد، به کلی نکته‌های تستی و تکنیک‌های محاسباتی و... مسلح شده!

۹ مثل کتاب درسی، تست‌هامون رویکرد مسائل واقعی گرفتن و از حالت انتزاعی خارج شدن.  
۱۰ تعداد تست‌هاش خیلی زیاده و البته متناسب با اهمیت هر مبحثه! اینقدر که اگه همشون رو کار کنی، به اون مبحث در حد تیم ملی مسلط می‌شی. پُل هالموس می‌گه: تمرین قلب ریاضیات است. اگه اینطوریه پس کتاب ما متخصص قلبه! ❤️

## ساختار کتاب

حالا چند جمله‌ای هم راجع به ساختار کتاب برات بگم.  
توی هر درس اگه لازم بوده، مطالب رو به چند بخش تقسیم کردیم و درسنامه و مثال حل شده براش آوردیم، ولی مطالب فنی و تکنیکی رو نگه داشتیم واسه حل تست‌های خفن و اون‌ها را تحت عنوان «راهبرد» توی قسمت پاسخ تشریحی آوردیم.  
«راهبردها» برای کسانی که می‌خوان صد بزنن! بعد از درسنامه هر قسمت، تست‌های مربوط به اون قسمت اومده. فصل که تموم میشه به آزمون جامع از کل فصل برات گذاشتیم تا خودتو محک بزنی. بعد از آزمون، پاسخ کلیدی تست‌ها اومده و بعدشم پاسخ‌های تشریحی اون فصل.  
تست‌ها رو براتون دستچین کردیم تا سوال‌های بی‌کیفیت و کم‌کیفیت توی کتاب نباشه. توی پاسخ‌های تشریحی هم تا می‌شده توضیح دادیم، چون می‌دونیم خیلی از شماها به معلم‌های کنکوری خوب دسترسی ندارید تا سوال‌هایی رو که براتون پیش میاد پرسی. سوالات سخت رو با علامت ★ مشخص کردیم. سعی کنید پس از حل سایر تست‌ها سراغ این سوالات بروید.

## راهنمای استفاده از کتاب

خوب بذار بگم چطوری از کتاب استفاده کنی! اول درسنامه رو با مثالاش خوب بخون، بعد برو سراغ حل تست‌ها. هر وقت دیدی نمی‌تونی به سؤال رو حل کنی، برو سراغ پاسخ‌نامه تشریحی، شاید راهبردی داره که تو بلد نیستی.  
اگه وقت نداری، تست‌ها رو دو یا چند قسمت کن! مثلاً فقط شماره‌های زوجش رو بزن. نکته‌هایی رو که یاد می‌گیری حاشیه‌نویسی کن و سعی کن لااقل هر دو هفته به بار اون‌ها رو دوره کنی. در انتهای فصل یا برای جمع‌بندی می‌تونی از آزمون انتهای فصل استفاده کنی و ببینی توی زمان پیشنهادی می‌تونی چه درصدی بزنی.


## و اما قدردانی...

یه بار رفتم اتاق مدیر انتشارات، آقای احمد اختیاری، دیدم پرینت اولیه همین کتاب رو به همراه کتاب درسی گذاشتن جلوشون و دارن مطابقت میدن. خیلی برام جالب بود با اینکه اصلاً وقت سر خاروندن ندارن و رشته تحصیلیشون هم به ریاضی ربطی نداره، به نکاتی اشاره می‌کردن که توی کتاب تأثیرگذار بود. چقدر شکل کتاب و نحوه چیدمان مطالب و رده‌بندی تست‌ها و میزان پاسخ تشریحی و ... برایشون اهمیت داره!

باید اینجا خیلی ازشون تشکر کنم و بگم خیلی چیزها ازتون یاد گرفتم.  
دوم باید از استاد انوشه، بزرگ‌مرد شیمی ایران تشکر کنم که در حال حاضر مدیر شورای تألیف مهر و ماه هستن. ایشون چندین جلسه با من و مولف‌ها گذاشتن و حتی به خاطر خواهش مکرر من، بخشی از کتاب رو بررسی کردن و نظراتی مهم، برای بهبود کتاب دادن. سوم از استادان بزرگوار بهمن اصلاح‌پذیر و هوشنگ نظری متشکرم که تجربه گران بهاشون در زمینه آموزشی ریاضی رو در اختیار من و سایر مؤلفان عزیز قرار دادن. همچنین استاد نظری فرصتی گذاشتن و کتاب رو مطالعه فرمودن.

- مطالب درسی، بسیار دقیق و حیوا بیان شده است. تمام درسنامه‌ها و تست‌ها را با جواب‌ها همراه کردیم؛
- انضاماً هم غلط مغربی نداشتیم و هم بعضی از تست‌ها که چندین راه حل داشت هر چند راه بیان شده بود.
- ارادتمند دوستان: هوشنگ نظری

چهارم از خانم مریم تاجداری مدیر تولید و همه عزیزانی که در زمینه تولید کتاب همراهی کردند تشکر می‌کنم! بخصوص از خانم رویا طبسی صفحه‌آرای عزیز و بادقت مهروماه که زحمات زیادی رو متقبل شدن.  
گروه هنری خلاق و دوست داشتنی آقایان حسین شیرمحمدی، تایماز کاویانی و حسام طلایی به خاطر طرح‌های زیباشون. تاپیست محترم ربابه موسوی‌خواه و رسام‌ها مریم صابری‌برون و میترا میرمصطفی.  
آقایان مهندس امیر انوشه مدیر سایت، عماد ولدی و حمیدرضا پیام واحد انفورماتیک و تبلیغات بابت همکاری‌های صمیمانه‌شون. امیدوارم این کتاب اولین گام در مسیر موفقیت‌هاتون باشه.  
از تمام صاحب‌نظران، استادان و خوانندگان عزیز صمیمانه درخواست می‌کنیم که این مجموعه را از نقد و نظر خود محروم نسازند. خواهشمند است نظرات خود را از طریق اینستاگرام به آیدی مقابل ارسال نمایند.

 ashrafii.official

مدیر گروه ریاضی مهروماه

عباس اشرفی

# فهرست



۹

فصل اول مجموعه، الگو و دنباله

۳۷

فصل دوم مثلثات

۶۱

فصل سوم توان‌های گویا و عبارتهای جبری

۸۷

فصل چهارم معادله‌ها و نامعادله‌ها

۱۱۳

فصل پنجم تابع

۱۴۱

فصل ششم شمارش، بدون شمردن

۱۵۷

فصل هفتم آمار و احتمال

۱۷۵

پاسخ‌نامه تشریحی

۳۰۵

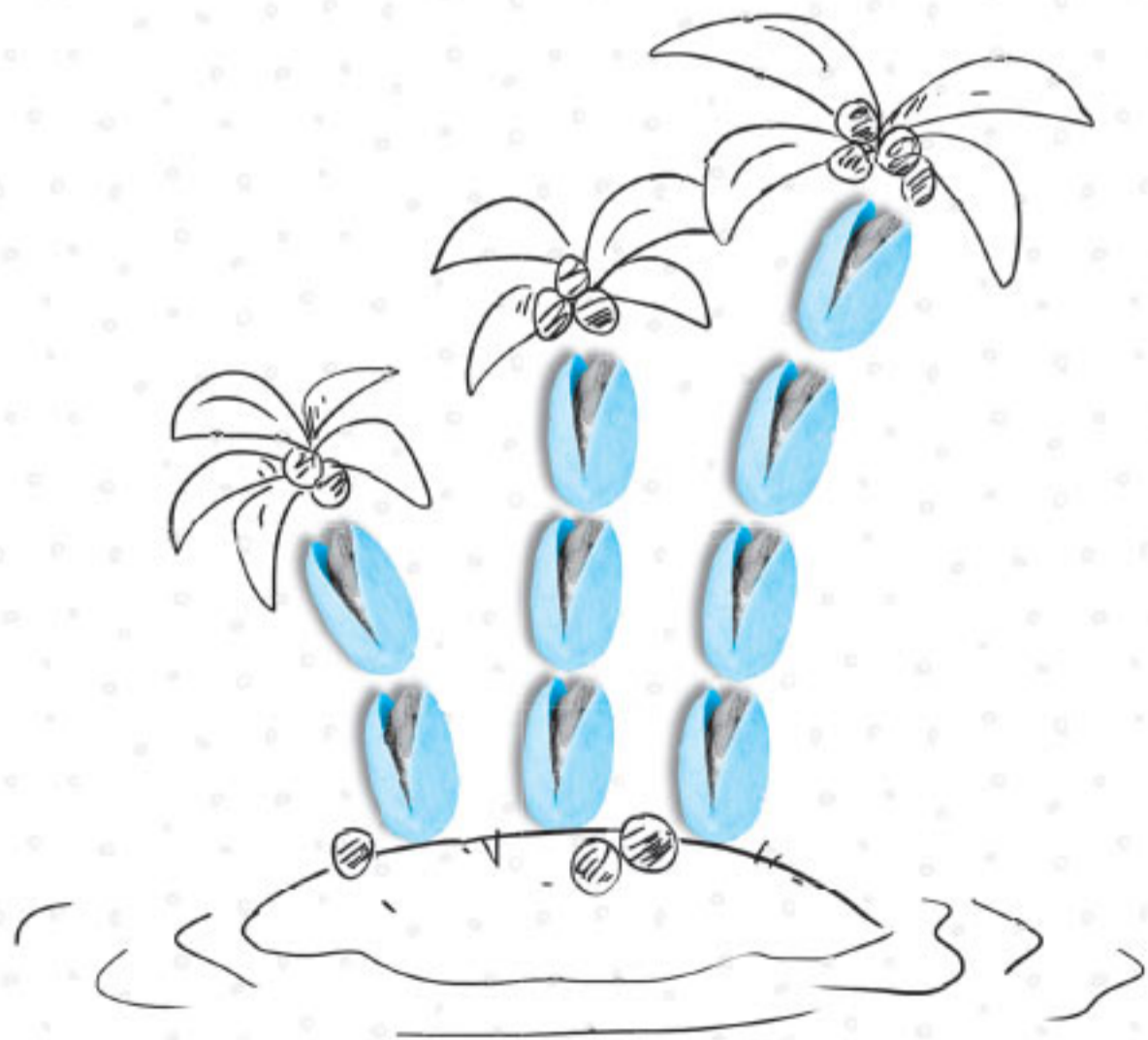
پاسخ‌نامه کلیدی

۳۱۱

پیوست سؤالات کنکور ۱۴۰۰

## مجموعه، الگو و دنباله

این فصل به دو بخش متفاوت تقسیم می‌شود! اولیش، مجموعه‌های متناهی و نامتناهی و متمم به مجموعه‌اس. توی این درس یاد می‌گیری عضوهای چه مجموعه‌هایی رو آگه بشمیری تموم می‌شن و کدوم‌ها تموم نمی‌شن. همین‌طور یاد می‌گیری مجموعه مرجع چیه و اعضای که متعلق به یه مجموعه نیستن کجا قرار می‌گیرن. دومیش الگو و دنباله‌اس. توی این درس یواش، یواش یاد می‌گیری چطوری پدیده‌های نظم‌پذیر رو بیاری توی قالب ریاضی و رفتار شون رو پیش‌بینی کنی. آخرش هم با چند تا دنباله مهم آشنا می‌شی.



## درس اول: مجموعه‌ها

**یادآوری:** در سال‌های گذشته با مجموعه‌های مهمی از اعداد مانند اعداد طبیعی و ... آشنا شدید که به‌طور خلاصه به آن‌ها اشاره می‌کنیم:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \text{ : مجموعه اعداد طبیعی}$$

$$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \text{ : مجموعه اعداد حسابی}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \text{ : مجموعه اعداد صحیح}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\} \text{ : مجموعه اعداد گویا}$$

$$\mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \mathbb{Q} \text{ : مجموعه اعداد گنگ}$$

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' \text{ : مجموعه اعداد حقیقی}$$

### نکته

1 مجموعه اعداد طبیعی، زیرمجموعه اعداد حسابی است و مجموعه اعداد حسابی، خود زیرمجموعه اعداد صحیح است و مجموعه اعداد صحیح زیرمجموعه اعداد گویا می‌باشد.

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

2 مجموعه اعداد گویا و گنگ هیچ اشتراکی با هم ندارند ولی هر دو زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی هستند.

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$$

اعداد حقیقی ( $\mathbb{R}$ )

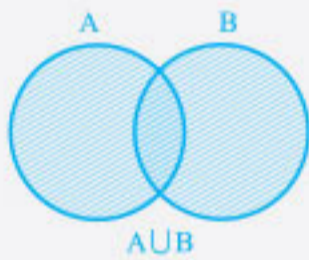
اعداد گویا ( $\mathbb{Q}$ )	اعداد گنگ ( $\mathbb{Q}'$ )
اعداد صحیح ( $\mathbb{Z}$ )	$\pi, \sqrt{2}, \sqrt{7}$
اعداد حسابی ( $\mathbb{W}$ )	$\frac{2}{7}, \frac{3}{4}$
اعداد طبیعی ( $\mathbb{N}$ )	$0, 31$
5 1 3 12	-2

در نمودار مقابل، همه مجموعه‌های گفته‌شده نشان داده شده و روابط آن‌ها با یکدیگر مشخص شده است:

### مهم

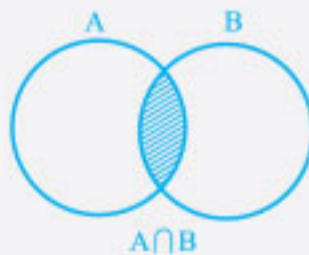
تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $n$  عضوی  $2^n$  است.

### اجتماع دو مجموعه



اجتماع دو مجموعه  $A$  و  $B$  مجموعه‌ای است که اعضای آن عضو مجموعه  $A$  یا مجموعه  $B$  یا عضو هر دوی آن‌ها باشند. اجتماع دو مجموعه را با نماد  $A \cup B$  نمایش می‌دهند.

### اشتراک دو مجموعه

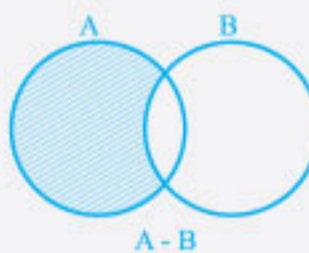


اشتراک دو مجموعه  $A$  و  $B$  مجموعه‌ای است که اعضای آن عضو هر دو مجموعه  $A$  و  $B$  باشند. اشتراک دو مجموعه را با نماد  $A \cap B$  نمایش می‌دهند.

### نکته

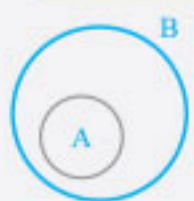
دو مجموعه  $A$  و  $B$  را جدا از هم گوئیم هرگاه  $A \cap B = \emptyset$  باشد.

### تفاضل دو مجموعه



مجموعه  $A - B$ ، مجموعه‌ای است که اعضای آن عضو مجموعه  $A$  باشند ولی عضو مجموعه  $B$  نباشند.

### نکته



$$\begin{aligned} A \subseteq B &\rightarrow A \cup B = B \\ A \subseteq B &\rightarrow A \cap B = A \\ A \subseteq B &\rightarrow A - B = \emptyset \end{aligned}$$

با توجه به نمودار مقابل اگر  $A \subseteq B$  باشد، نتایج مقابل به‌دست می‌آید:

با برقراری هر کدام از نتایج، می‌توان نتیجه گرفت  $A \subseteq B$ .

مشان: کدام یک از مجموعه‌های زیر با سایر مجموعه‌ها متفاوت است؟

- (۱)  $Z - \mathbb{R}$       (۲)  $W - \mathbb{N}$       (۳)  $Q' \cap Q$       (۴)  $Q' - \mathbb{R}$

پاسخ:

گزینه ۱:  $Z - \mathbb{R} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} - \mathbb{R} = \emptyset$

گزینه ۲:  $W - \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} - \{1, 2, 3, \dots\} = \{0\}$

گزینه ۳:  $Q' \cap Q = \emptyset$

گزینه ۴:  $Q' - \mathbb{R} = \emptyset$

مشان: اگر  $A = \{a, b, c\}$ ،  $B = \{a, \{b\}, c\}$  و  $C = \{a, b, \{c\}\}$  باشند، آن‌گاه  $(A \cup B) - C$  کدام است؟

- (۱)  $\{b, c\}$       (۲)  $\{\{c\}, b\}$       (۳)  $\{\{b\}, c\}$       (۴)  $\{\{b\}, \{c\}\}$

$A \cup B = \{a, b, \{b\}, c\}$

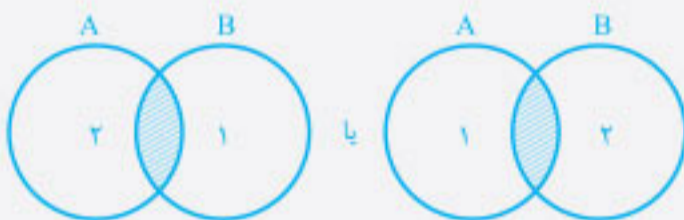
پاسخ: اجتماع دو مجموعه  $A$  و  $B$  را می‌یابیم. اکنون از اجتماع دو مجموعه  $A$  و  $B$  عضوهای شامل  $C$  را حذف می‌کنیم تا به  $(A \cup B) - C$  برسیم.

$(A \cup B) - C = \{\{b\}, c\}$

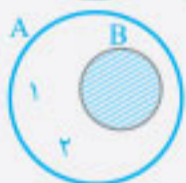
مشان: اگر  $A \cap B = A \cup B - \{1, 2\}$  و  $A \cap B \neq \emptyset$  باشند، آن‌گاه کدام گزینه می‌تواند نادرست باشد؟

- (۱)  $B - A = \{1, 2\}$       (۲)  $A - B = \{1, 2\}$       (۳)  $(B - A) \cup (A - B) = \{1, 2\}$       (۴)  $A \cap B = B - A$

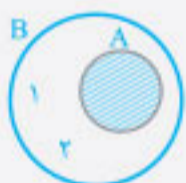
پاسخ: این دو مجموعه می‌توانند به شکل‌های زیر باشند:



الف: در این حالت  $(A - B) \cup (B - A) = \{1, 2\}$



ب: در این حالت  $B$  زیر مجموعه  $A$  است، مشخص است که:  $A - B = \{1, 2\}$



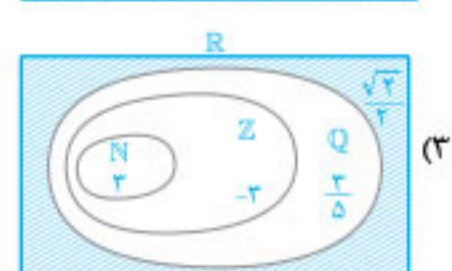
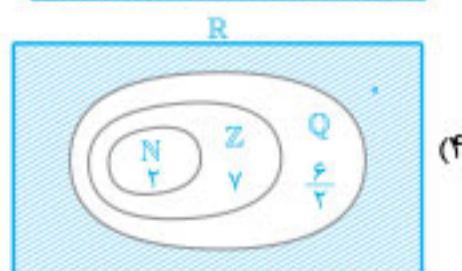
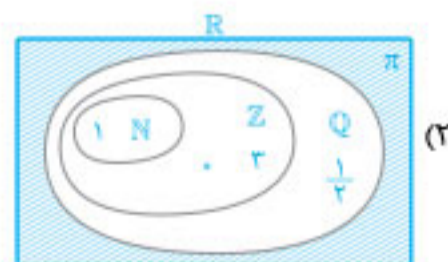
پ: در این حالت که  $A$  زیر مجموعه  $B$  است، خواهیم داشت:  $B - A = \{1, 2\}$

پس گزینه «۴» درست است.

۱. کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) مجموعه  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$  اعداد گنگ نام دارد.  
 (۲) هر عدد گویا صحیح است.  
 (۳) هر عدد طبیعی، حسابی است.  
 (۴) مجموعه  $W - \mathbb{N}$  تک‌عضوی است.

۲. کدام نمودار ون به درستی رسم شده است؟





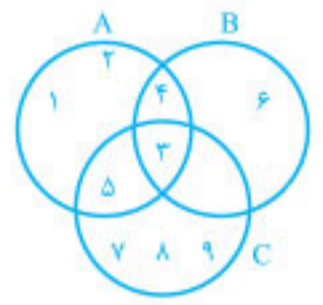


۳. کدام دو مجموعه جدا از هم هستند؟

- Q-N, Z (۴)
- R-Z, Q (۳)
- Q-Z, N (۲)
- R-N, Z (۱)

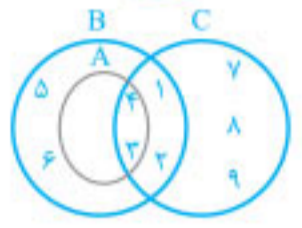
۴. با توجه به شکل مقابل، حاصل  $(A-B) - (C \cup B)$  کدام است؟

- {1, 2} (۱)
- {1, 2, 5} (۲)
- {1, 2, 4} (۳)
- {1, 2, 3} (۴)



۵. با توجه به شکل مقابل مجموعه  $(A-B) \cup (C-A)$  چند عضو دارد؟

- ۳ (۱)
- ۴ (۲)
- ۵ (۳)
- ۶ (۴)



۶. اگر  $A \cap B = \{1, 2\}$ ،  $A - B = \{2, 5, 9\}$  و  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$  باشند، مجموعه B کدام است؟

- {1, 2, 3, 9} (۱)
- {1, 2, 4} (۲)
- {1, 2, 3} (۳)
- {1, 2, 4, 9} (۴)

۷. اگر  $A = \{x^2 | x \in \mathbb{N}\}$  و  $B = \{x^2 | x \in \mathbb{Z}\}$  باشند، آن گاه مجموعه  $B - A$  چند عضو دارد؟

- (۱) هیچ عضوی ندارد.
- (۲) یک عضو دارد.
- (۳) دو عضو دارد.
- (۴) بی شمار عضو دارد.

۸. اگر  $A = \{\frac{f-n}{n} | n \in \mathbb{N}, n < 5\}$  و  $B = \{\frac{fn-n^2}{n+1} | n \in \mathbb{N}, n \leq 4\}$  باشند، مجموعه  $(A \cup B) - (A \cap B)$  چند عضو دارد؟

- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) ۳

۹. اگر A و B دو زیرمجموعه از اعداد طبیعی و  $(A \cap B) \cup \{1\} = A \cup B \neq A \cap B$  باشد، کدام مورد صحیح است؟

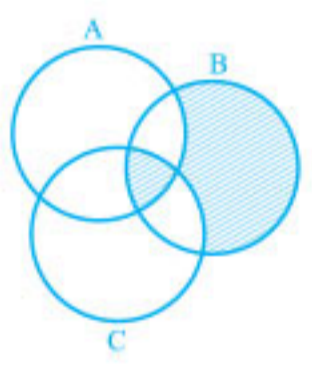
- (۱)  $A = B$
- (۲)  $1 \in A$
- (۳)  $A \subseteq B$
- (۴)  $\{1\} \subseteq (B - A) \cup (A - B)$

۱۰. اگر به اعضای مجموعه‌ای، یک عضو اضافه شود، تعداد زیرمجموعه‌های آن چه تغییری می‌کند؟

- (۱) ۲ واحد اضافه می‌شود.
- (۲) ۲ برابر می‌شود.
- (۳) ۴ واحد اضافه می‌شود.
- (۴) ۴ برابر می‌شود.

۱۱. در شکل مقابل قسمت هاشور خورده کدام است؟

- (۱)  $(B - (A - C)) \cup (A \cap B \cap C)$
- (۲)  $((B - A) - C) \cup (A \cap B \cap C)$
- (۳)  $((C - B) - A) \cup (A \cap B \cap C)$
- (۴)  $(C - (B - A)) \cup (A \cap B \cap C)$



۱۲. کدام گزینه نمایش نمودار ون مجموعه  $A \cap (B \cup C) - (B \cap C)$  است؟

- (۱)
- (۲)
- (۳)
- (۴)

۵۳. اگر  $A$  مجموعه شمارنده‌های مثبت عدد ۲۴ و  $B$  مجموعه مضارب مثبت عدد ۲ باشد، چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟  
 الف)  $A \cup B$  دارای ۸ عضو است.  
 ب)  $A \cap B$  دارای ۴ عضو است.  
 پ)  $A - B$  متناهی است.  
 (۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۵۴. کدام گزینه وجود ندارد؟

(۱) مجموعه متناهی که زیرمجموعه نامتناهی داشته باشد.  
 (۲) دو مجموعه نامتناهی  $A$  و  $B$  که  $A - B$  تک‌عضوی باشد.  
 (۳) مجموعه نامتناهی که زیرمجموعه نامتناهی داشته باشد.  
 (۴) دو مجموعه نامتناهی که اشتراک آن‌ها نامتناهی باشد.

۵۵. کدام مجموعه زیر متناهی است؟

(۱)  $Z - W$  (۲)  $W \cap N$  (۳)  $Z \cap N$  (۴)  $W - N$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۵۶. کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

(۱) مجموعه مضرب‌های مثبت عدد ۳  
 (۲) مجموعه اعداد اول فرد  
 (۳) مجموعه اعداد فرد و مضرب ۵  
 (۴) مجموعه همه انسان‌ها از آغاز خلقت تا کنون

۵۷.  $A$  مجموعه متناهی و مجموعه‌های  $A$  و  $C$  نامتناهی اند. کدام یک از گزینه‌های زیر حتماً نامتناهی است؟

(۱)  $A - (C - B)$  (۲)  $B \cup (A - C)$  (۳)  $A - (B - C)$  (۴)  $(B \cap C) - A$

۵۸. اگر مجموعه  $A$  متناهی و مجموعه‌های  $B$  و  $C$  نامتناهی باشند، هریک از مجموعه‌های  $A \cap (B \cup C)$  و  $B - (A \cap C)$  به ترتیب از راست به چپ، از نظر متناهی بودن یا نبودن چگونه‌اند؟

(۱) متناهی - متناهی (۲) نامتناهی - متناهی (۳) متناهی - نامتناهی (۴) نامتناهی - نامتناهی

۵۹. اگر  $A$  مجموعه نامتناهی و  $B \subseteq A$  باشد، آن‌گاه کدام مجموعه یقیناً مجموعه‌ای متناهی است؟

(۱)  $(B - A) \cap (A \cup B)$  (۲)  $(A \cap B) \cup (A - B)$  (۳)  $(A \cup B) \cap (A - B)$  (۴)  $(B - A) \cup (A - B)$

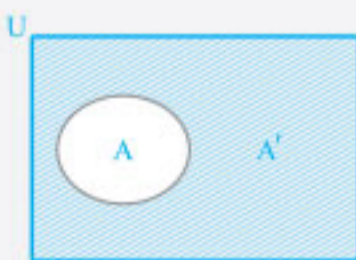
### درس دوم: متمم یک مجموعه

#### مجموعه مرجع

در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیر مجموعه آن باشند، مجموعه مرجع می‌نامیم و آن را با  $U$  نمایش می‌دهیم.

#### متمم

در نظر بگیریم  $U$  مجموعه مرجع باشد، مجموعه  $U - A$  را مجموعه متمم  $A$  می‌نامیم و آن را با  $A'$  نمایش می‌دهیم.



مثال: اگر  $A' = \{1, 2, 4\}$  و  $B' = \{2, 3\}$  باشند و مجموعه مرجع، اعداد طبیعی فرض شود، آن‌گاه  $(A \cap B)'$  کدام است؟

(۱)  $\{1, 2, 3\}$  (۲)  $\{1, 2, 3, 4\}$  (۳)  $\{4, 5, 6, \dots\}$  (۴)  $\{5, 6, 7, \dots\}$

پاسخ: از آنجایی که  $A' = \{1, 2, 4\}$  است با توجه به مرجع بودن  $N$  داریم:  
 $A = \{3, 5, 6, \dots\}$ ,  $B = \{1, 4, 5, \dots\}$   
 $A \cap B = \{3, 5, 6, \dots\} \cap \{1, 4, 5, 6, \dots\} = \{5, 6, \dots\}$   
 بنابراین:

$(A \cap B)' = \{1, 2, 3, 4\}$  و همین‌طور  $(A \cap B)'$  برابر می‌گردد با:

#### قوانین متمم و تفاضل

①  $(A')' = A$

②  $\begin{cases} (A \cap B)' = A' \cup B' \\ (A \cup B)' = A' \cap B' \end{cases}$  قوانین دمورگان



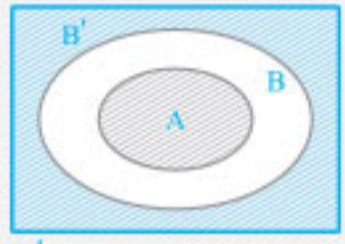
- ۳  $\begin{cases} A - B = A \cap B' \\ B - A = B \cap A' \end{cases}$  قانون تفاضل به اشتراک
- ۴  $(A - B) \cup (A \cap B) = A$
- ۵  $A - (A \cap B) = A - B$
- ۶  $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$

**مثال:** اگر  $A \subseteq B$  و  $U$  مجموعه مرجع باشد، آن گاه چه تعداد از رابطه‌های زیر درست است؟

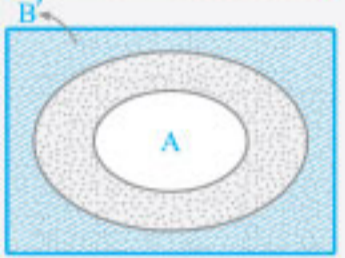
الف) $A \cap B' = \emptyset$	ب) $A' \cap B' = B'$	پ) $B' \subseteq A'$	ت) $A \cup B' = U - (B - A)$
۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)	۴ (۴)

**پاسخ:**

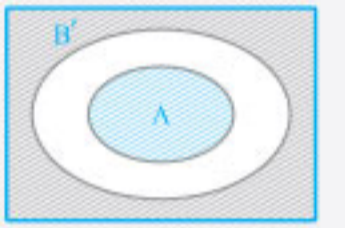
**روش اول:** ابتدا نمودار این مجموعه‌ها را رسم می‌کنیم. برای بررسی قسمت الف) قسمت‌های  $B'$  و  $A$  را هاشور می‌زنیم. همان‌طور که می‌بینید این دو مجموعه اشتراکی ندارند. همین کار را برای قسمت ب) انجام می‌دهیم.



می‌بینیم که اشتراک  $A'$  (قسمت نقطه‌چین) با  $B'$  (قسمت هاشور خورده) همان  $B'$  می‌باشد و در همین شکل می‌بینید که  $B' \subseteq A'$  است. برای بررسی قسمت ت) ابتدا  $A \cup B'$  را تعیین می‌کنیم. حال  $B - A$  را می‌یابیم.



اگر دقت کنید مجموعه  $U - (B - A)$  برابر قسمت هاشور خورده شکل قبلی است و  $A \cup B' = U - (B - A)$  است.



**روش دوم:** قسمت‌های مختلف را به کمک قوانین مجموعه‌ها بررسی می‌کنیم. الف) با توجه به قوانین اشاره شده داریم:

$A \cap B' = A - B$  و از آن جایی که  $A \subseteq B$  است، پس  $A - B$  برابر  $\emptyset$  است.

ب) به کمک قانون اجتماع و اشتراک متمم‌ها داریم:  $(A' \cap B') = (A \cup B)'$

از آن جایی که  $A \cup B = B$  می‌باشد پس  $(A \cup B)' = B'$  است و در نتیجه  $A' \cap B' = B'$  است.

پ) چون  $A \subseteq B$  است، پس  $B' \subseteq A'$  است. (به نمودار دقت کنید)

ت) از آن جایی که  $U - (B - A) = (B - A)'$  و با توجه به این که  $B - A = B \cap A'$  بنابراین:

$$(B - A)' = (B \cap A')' = B' \cup A = A \cup B'$$

پس گزینه «۴» درست است.

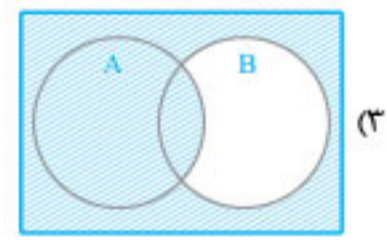
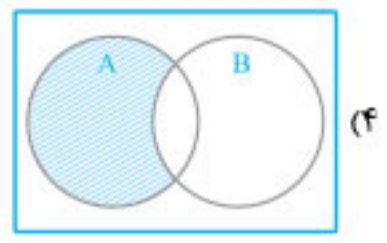
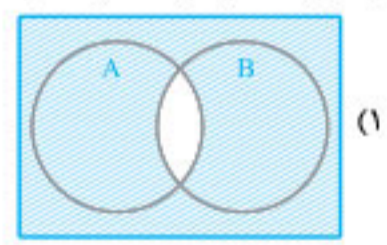
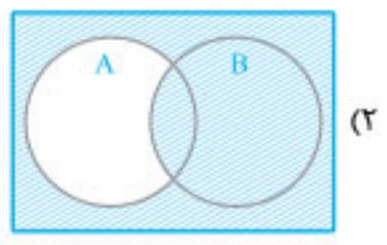
۶۰. اگر  $A$  و  $B$  دو زیرمجموعه از اعداد طبیعی و  $A$  متناهی و  $B$  نامتناهی باشند، آن گاه کدام مجموعه قطعاً نامتناهی است؟

- ۱)  $A' \cup B'$
- ۲)  $A \cap B'$
- ۳)  $A \cup B'$
- ۴)  $A' \cap B'$

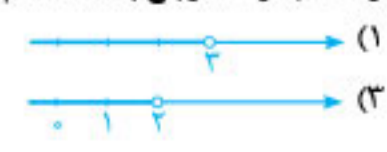
۶۱. اگر  $A = (-, 5]$  و  $B = (-1, 4)$  باشند، مجموعه مرجع کدام باشد تا مجموعه  $A' \cap B'$  متناهی باشد؟

- ۱)  $(-2, 5]$
- ۲)  $(-1, 5]$
- ۳)  $(-2, 6]$
- ۴)  $(-1, 6]$

۶۲. نمودار  $(A - B) \cup (A \cap B)'$  کدام است؟



۶۳. اگر  $Z$  مجموعه مرجع باشد، متمم مجموعه  $A = \{2, 4, 5, 6, \dots\}$  روی محور طول‌ها کدام است؟



۹۰. اگر  $U$  مجموعه مرجع و  $A$  و  $B$  دو زیرمجموعه آن باشند و  $n(A \cup B) = 43$ ،  $n(B) = 20$ ،  $n(A) = 35$  و  $n(U) = 50$  باشند، آن گاه  $n(A \cap B')$  کدام است؟

- ۱۷ (۱)      ۱۸ (۲)      ۲۲ (۳)      ۲۳ (۴)

۹۱. اگر  $U$  مجموعه مرجع و  $A$  و  $B$  زیرمجموعه‌های آن باشند و  $n(U) = 100$ ،  $n(A) = 60$ ،  $n(B') = 60$  و  $n(A \cap B) = 20$  باشند، آن گاه  $n(A \cup B)'$  کدام است؟

- ۱۰ (۱)      ۲۰ (۲)      ۲۵ (۳)      ۳۰ (۴)

۹۲. در یک کلاس ۳۰ نفره، ۱۲ نفر از دانش آموزان دارای برادر و ۱۴ نفر دارای خواهر هستند. اگر تعداد دانش آموزان تک فرزند را با  $x$  نمایش دهیم، محدوده حسابی  $x$  کدام است؟

- ۰ ≤ x ≤ ۱۶ (۱)      ۴ ≤ x ≤ ۱۶ (۲)      ۴ ≤ x ≤ ۱۸ (۳)      ۰ ≤ x ≤ ۱۸ (۴)

۹۳. اگر  $A \subseteq B \subseteq C'$  باشد و مجموعه‌های  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $U$  (مرجع) به ترتیب دارای ۲، ۶، ۱۲ و ۳۰ عضو باشند، حاصل  $n((A \cup B) - C)$  کدام است؟

- ۲۴ (۱)      ۱۸ (۲)      ۱۲ (۳)      ۱۰ (۴)

۹۴. در یک کلاس ۶۰ نفری، ۲۸ نفر والیبال، ۲۶ نفر بسکتبال و عده‌ای هم فوتبال بازی می‌کنند. از این تعداد ۱۰ نفر فوتبال و والیبال، ۱۳ نفر بسکتبال و والیبال، ۹ نفر فوتبال و بسکتبال و ۷ نفر هر سه ورزش را بازی می‌کنند. در این کلاس چند نفر فقط فوتبال بازی می‌کنند؟ (به شرط آن که هر فرد لااقل در یک ورزش شرکت کند)

- ۱۶ (۱)      ۱۷ (۲)      ۱۸ (۳)      ۱۹ (۴)

۹۵. ۳۰۰ نفر در روز اول از یک بازارچه خیریه بازدید کردند. ۱۵۰ نفر تابلوی نقاشی، ۱۲۰ نفر گل و ۱۱۰ نفر گلدان خریدند. ۴۰ نفر گل و گلدان، ۵۰ نفر گل و تابلوی نقاشی، ۳۰ نفر گلدان و تابلوی نقاشی و ۱۰ نفر هر سه مورد را خریدند. چند نفر دقیقاً یکی از موارد تابلو، گلدان و گل را خریده‌اند؟

- ۱۷۰ (۱)      ۱۸۰ (۲)      ۱۹۰ (۳)      ۲۰۰ (۴)

۹۶. در یک کلاس ۳۹ نفری، ۱۶ نفر در گروه ورزش، ۱۲ نفر در گروه روزنامه دیواری و ۹ نفر فقط در گروه ورزش هستند. چند نفر آنان عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند؟ (ریاضی ۹۸)

- ۱۵ (۱)      ۱۶ (۲)      ۱۷ (۳)      ۱۸ (۴)

۹۷. در یک کلاس ۴۲ نفری، ۱۵ نفر عضو گروه آزمایشگاهی و ۱۲ نفر عضو گروه فوتبال و ۷ نفر آنان عضو هر دو گروه هستند. چند نفر آنان عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند؟ (ریاضی خارج ۹۸)

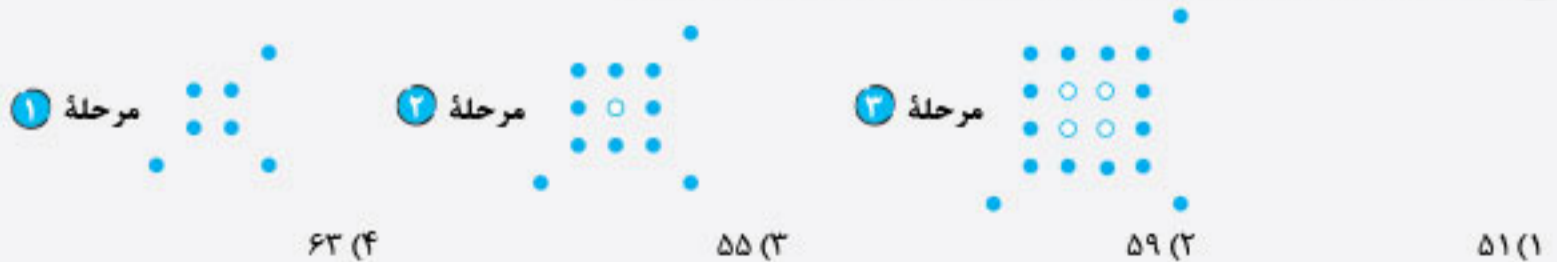
- ۱۵ (۱)      ۱۸ (۲)      ۲۱ (۳)      ۲۲ (۴)

### درس سوم: الگو

یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع یا اعداد را الگو می‌نامند.

برای مطالعه الگوها بهتر است آن‌ها را به زبان اعداد بیان کنیم و به کمک اعداد آن‌ها را ساماندهی کنیم. مثلاً به کمک اعداد می‌توان الگوی بلندی و کوتاهی طول روز را در طی یکسال یافت.

**مثال:** در مرحله پانزدهم از الگوی زیر تعداد دایره‌های مشکی کدام است؟



پاسخ: اگر دایره‌های مشکی را بشماریم می‌توان به اعداد مقابل دست یافت:

یعنی هر مرحله ۴ واحد به تعداد آن‌ها اضافه می‌شود.

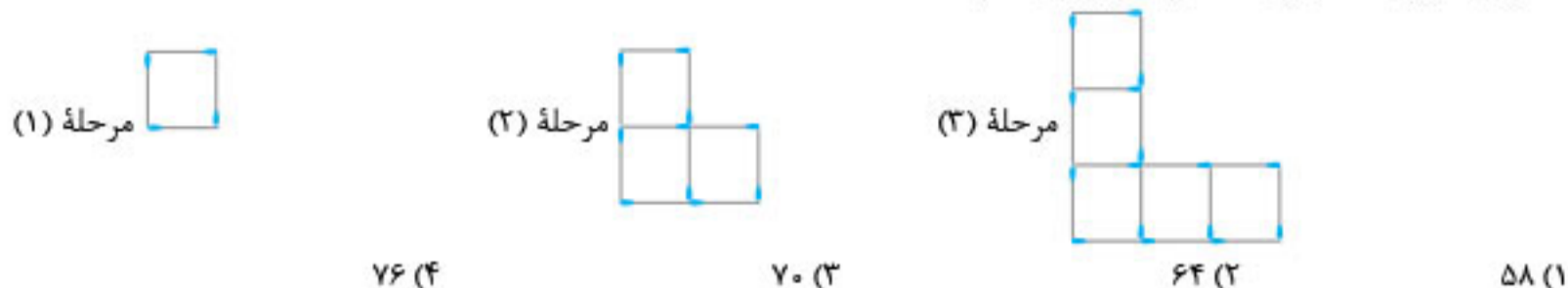
بنابراین برای رسیدن به پانزدهمین مرحله، ۱۴ بار عدد ۴ به عدد اول یعنی ۷ اضافه می‌گردد.

$$7 + (14 \times 4) = 7 + 56 = 63$$

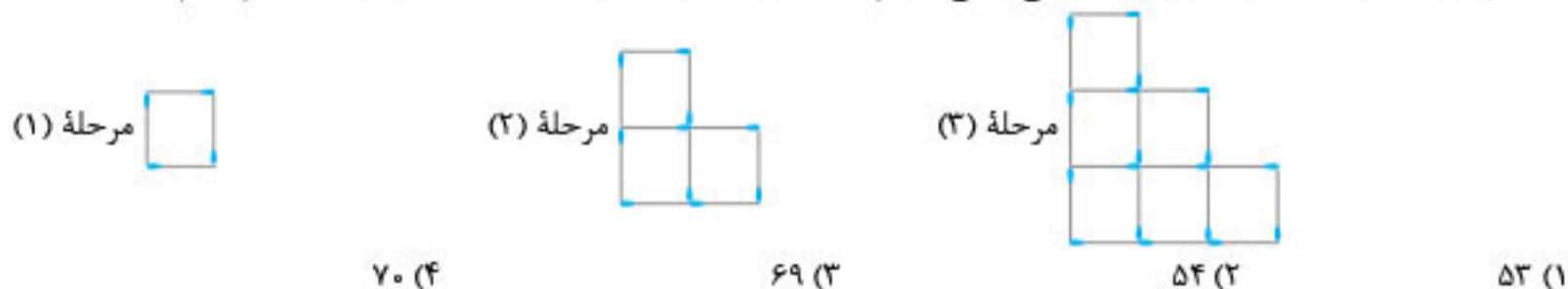
۹۸. با توجه به الگوی زیر، در چندمین مرحله تعداد نقاط ۸۲ تا می‌شود؟



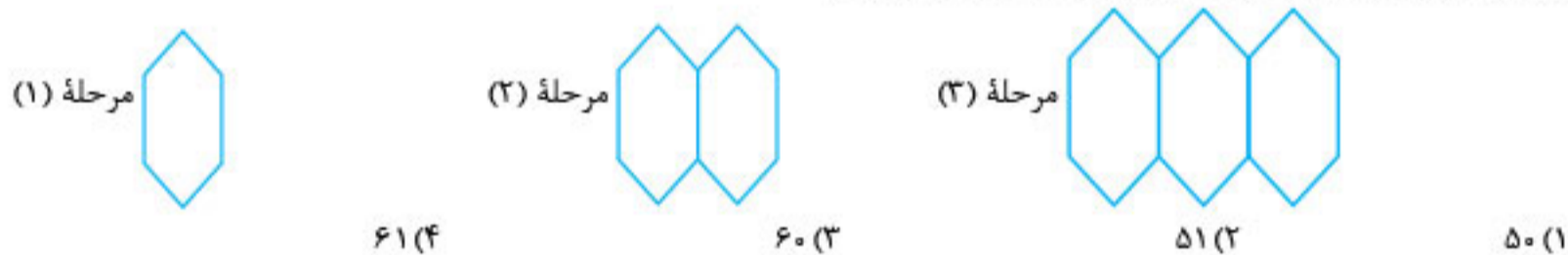
۹۹. تعداد چوب کبریت‌ها در مرحله دهم زیر کدام است؟



۱۰۰. با تعدادی چوب کبریت مطابق الگوی زیر اشکالی را می‌سازیم. تعداد چوب کبریت‌های استفاده شده در مرحله هفتم کدام است؟



۱۰۱. با توجه به الگوی زیر، تعداد پاره خط‌ها در مرحله دهم کدام است؟



۱۰۲. با توجه به الگوی زیر، در مرحله دهم تعداد نقاط کدام است؟



### الگوهای مهم

#### الگوی خطی

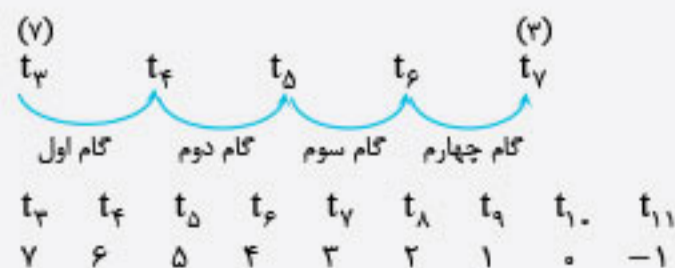
الگوهایی را که جمله عمومی آن‌ها  $t_n = an + b$  است، الگوی خطی می‌نامیم که در آن‌ها  $a$  و  $b$  اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

در این الگوها اختلاف هر دو جمله متوالی، برابر ضریب  $n$  می‌باشد. مثلاً اختلاف دو جمله متوالی از دنباله  $a_n = 3n - 1$  برابر ۳ است.

**مثال:** در دنباله‌ای که از الگوی خطی پیروی می‌کند، اگر جمله سوم برابر ۷ و جمله هفتم برابر ۲ باشد، چند جمله این دنباله مثبت است؟

۸ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴)

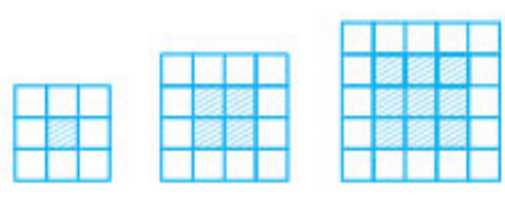
**پاسخ:** با توجه به این‌که از جمله سوم تا جمله هفتم مطابق عبارت زیر، ۴ گام اختلاف وجود دارد و اختلاف ۷ و ۳ هم برابر ۴- است، پس هر گام ۱- است.



همان‌طور که مشخص شد تا جمله نهم، جملات مثبت هستند.

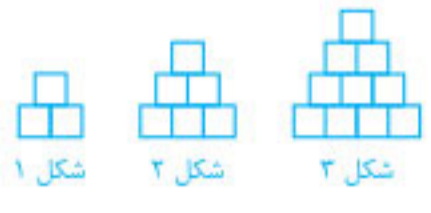


۱۲۳. در الگوی زیر در شکل دهم، نسبت تعداد مربع‌های سفید به مربع‌های رنگی کدام است؟



- ۱) ۳۳/۰
- ۲) ۲۲/۰
- ۳) ۴۴/۰
- ۴) ۵۵/۰

۱۲۴. با توجه به الگوی مقابل تعداد مربع‌های در شکل دهم کدام است؟



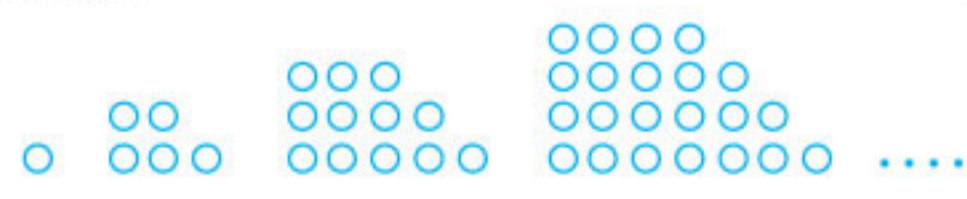
- ۱) ۲۸
- ۲) ۶۶
- ۳) ۴۵
- ۴) ۵۵

۱۲۵. با توجه به الگوی مقابل در شکلی که ۲۸ مربع سفید دارد، چند مربع رنگی می‌بینیم؟



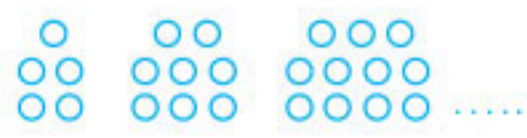
- ۱) ۶
- ۲) ۷
- ۳) ۸
- ۴) ۹

۱۲۶. در الگوی زیر، تعداد نقطه‌ها، در شکل نهم، کدام است؟



- ۱) ۱۱۷
- ۲) ۱۲۰
- ۳) ۱۲۳
- ۴) ۱۲۵

۱۲۷. در الگوی زیر، تعداد نقطه‌ها، در شکل دوازدهم، کدام است؟



- ۱) ۳۴
- ۲) ۳۶
- ۳) ۳۸
- ۴) ۴۰

### دنباله

هر تعداد عدد را که پشت سر هم قرار می‌گیرند یک دنباله می‌نامیم. این اعداد، جملات دنباله نامیده می‌شوند.

#### جمله عمومی دنباله

جمله  $n$  ام یک دنباله را جمله عمومی دنباله می‌نامند (به شرط طبیعی بودن عدد  $n$ ) و آن را با  $t_n$  یا  $a_n$  نمایش می‌دهند.

با داشتن  $t_n$ ، برای به دست آوردن هر جمله کافی است شماره آن جمله را به جای  $n$  قرار دهیم. به عنوان مثال:

در دنباله  $t_n = 5n^2 - 3n + 1$  جمله سوم کدام است؟  $t_3 \Rightarrow t_3 = 5(3)^2 - 3(3) + 1 = 37$  (جمله سوم)

**مثال:** اگر در یک دنباله  $a_1 = 0$  و به ازای  $n \geq 2$  داشته باشیم  $a_n = (1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9})(1 - \frac{1}{16}) \dots (1 - \frac{1}{n^2})$  آن گاه جمله

چندم دنباله  $a_n$  برابر  $525/0$  است؟

- ۱) ۱۰
- ۲) ۱۱
- ۳) ۲۰
- ۴) ۲۱

**پاسخ:** همه پرانتزها را می‌توان به کمک اتحاد مزدوج به شکل زیر تجزیه نمود:

$$a_n = (1 - (\frac{1}{2})^2)(1 - (\frac{1}{3})^2)(1 - (\frac{1}{4})^2) \dots (1 - (\frac{1}{n})^2)$$

حالا همه عبارت‌ها را تجزیه می‌کنیم.

$$a_n = (1 - \frac{1}{4})(1 + \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9})(1 + \frac{1}{9})(1 - \frac{1}{16})(1 + \frac{1}{16}) \dots (1 - \frac{1}{n^2})(1 + \frac{1}{n^2})$$

$$a_n = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \dots \times (\frac{n-1}{n}) (\frac{n+1}{n})$$

اگر دقت کنید اعداد دوم و سوم، چهارم و پنجم ... با هم ساده می‌شوند و فقط عبارت اول و آخر ساده نمی‌شوند.

$$a_n = \frac{1}{2} (\frac{n+1}{n})$$



این مقدار برابر  $0.525$  است.  $\frac{1}{2} \left( \frac{n+1}{n} \right) = 0.525 \xrightarrow{\times 2} \frac{n+1}{n} = 1.05 \xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} n+1 = 1.05n$

$$\Rightarrow 1 = 1.05n - n \Rightarrow 1 = 0.05n \Rightarrow n = \frac{1}{0.05}$$

$$n = \frac{1}{0.05} = \frac{1}{\frac{1}{20}} = 20$$

می‌دانیم  $\frac{1}{20} = 0.05$  است، بنابراین:

### دنباله بازگشتی

دنباله‌ای که هر جمله آن با نظم خاصی از روی جملات قبلی‌اش پیدا شود را دنباله بازگشتی می‌نامند. مشهورترین دنباله بازگشتی، دنباله فیبوناتچی است که در آن دو جمله اول دنباله، یک هستند و از جمله سوم به بعد هر جمله از مجموع دو

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

جمله قبلی به دست می‌آید، یعنی:

$$\begin{cases} t_1 = t_2 = 1 \\ t_{n+2} = t_{n+1} + t_n \end{cases}$$

و می‌توان فرمول آن را به صورت مقابل نوشت:

**مثال:** اگر جملات یک دنباله به صورت  $a_{n+1} = 2a_n$  نوشته شود در صورتی که  $a_1 = 2$  باشد، چندمین جمله برابر ۱۹۲ می‌شود؟

۵ (۱)	۶ (۲)	۷ (۳)	۸ (۴)
-------	-------	-------	-------

**پاسخ:** این دنباله از جمله اول «۲» شروع می‌شود و هر جمله ۲ برابر جمله قبلی است. جملات دنباله را می‌نویسیم:

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \dots$$

همان‌طور که می‌بینید جمله هفتم این دنباله برابر ۱۹۲ است.

### مطالعه آزاد



**دنباله فیبوناتچی:** این اعداد به نام لئوناردو فیبوناتچی ریاضیدان ایتالیایی نام‌گذاری شده است. وی نخستین ریاضیدان بزرگ اروپا در قرن سیزدهم است که بیشتر فعالیت‌هایش از آثار ریاضیدان‌های مسلمان به خصوص خوارزمی، کرجی و ابوکامل تأثیر پذیرفته است. در دوران حیات فیبوناتچی مسابقات ریاضی در اروپا مرسوم بود. در یکی از همین مسابقات که در سال ۱۲۲۵ در شهر پیزا توسط امپراتور فردریک دوم برگزار شده بود مسئله زیر مطرح شد:

«فرض کنیم خرگوش‌هایی وجود دارند که هر جفت (یک نر و ماده) از آن‌ها به سن یک ماهگی رسیده باشند به ازای هر ماه که از زندگیشان سپری شود یک جفت خرگوش به دنیا می‌آورند. حال اگر فرض کنیم این خرگوش‌ها هرگز نمی‌میرند و در آغاز یک جفت از این نوع خرگوش داشته باشیم که به تازگی متولد شده‌اند، حساب کنید پس از  $n$  ماه چند جفت از این نوع خرگوش خواهیم داشت.» اگر تعداد خرگوش‌ها را در ماه‌های اول و دوم و ... حساب کنیم به دنباله فیبوناتچی می‌رسیم. فیبوناتچی با حل این مسئله و معرفی این دنباله به جهان که خواص شگفت‌انگیزی دارد تأثیر زیادی بر ریاضی و حتی سایر علوم گذاشت.

۱۲۸. جمله عمومی یک الگو به صورت  $a_n = \frac{2n+1}{n+2}$  است. جمله هفدهم آن کدام است؟

۱/۷ (۱)	۲/۶ (۲)	۵/۲ (۳)	۶/۸ (۴)
---------	---------	---------	---------

۱۲۹. جمله عمومی دنباله مقابل کدام است؟

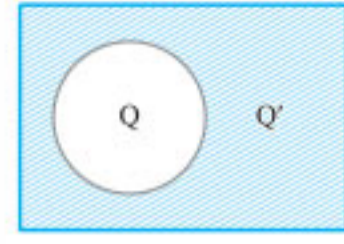
$-n^3$ (۱)	$(-1)^n n^3$ (۲)	$(-1)^{n+1} n^3$ (۳)	$n^3$ (۴)
------------	------------------	----------------------	-----------

$1, -8, 27, -64, \dots$



۱ ۲ ۳ ۴ ۵

**گزینه ۱:** با توجه به شکل مشخص است اختلاف دو مجموعه  $\mathbb{R}$  و  $\mathbb{Q}$  برابر  $\mathbb{Q}'$  است.



$$\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}'$$

**گزینه ۲:** نادرست. به عنوان مثال عدد  $\frac{1}{2}$  عددی گویاست، ولی صحیح نیست.

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W}$$

**گزینه ۳:** درست

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}, \mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \Rightarrow \mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

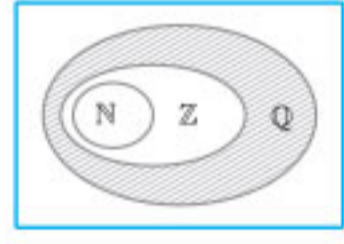
**گزینه ۱:** عدد ۶ هم طبیعی است و هم صحیح ولی در شکل داخل این دو مجموعه قرار ندارد.

**گزینه ۲:** عدد ۲ هم طبیعی است و هم صحیح ولی در شکل درون مجموعه اعداد طبیعی قرار ندارد.

**گزینه ۴:** عدد ۷ هم صحیح است و هم طبیعی، ولی درون مجموعه اعداد طبیعی قرار نگرفته است. همچنین عدد  $\frac{6}{3} = 2$  نیز در شکل درون این دو مجموعه قرار نگرفته است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

اگر اشتراک دو مجموعه برابر تهی باشد، آن دو را جدا از هم گویند. با توجه به نمودار ون، اشتراک قسمت هاشورخورده، یعنی  $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$  با  $\mathbb{N}$  برابر تهی است.



۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$C \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \text{ و } A - B = \{1, 2, 5\}$$

$$\Rightarrow (A - B) - (C \cup B) = \{1, 2, 5\} - \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{1, 2\}$$

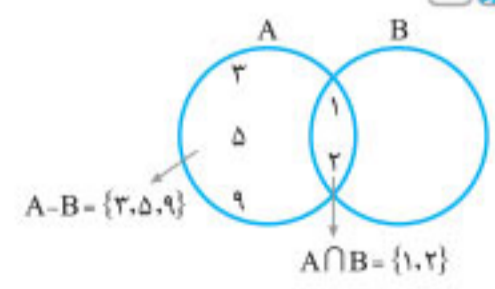
۱ ۲ ۳ ۴ ۵

با توجه به شکل  $A \subset B$  است، بنابراین  $A - B = \emptyset$  است.

$$C - A = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\} - \{3, 4\} = \{1, 2, 7, 8, 9\}$$

همان طور که می بینید، این مجموعه پنج عضو دارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵



اکنون چون  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$  می باشد، متوجه می شویم که عدد ۴ فقط عضو  $B$  است. در نتیجه مجموعه  $B$  برابر  $\{1, 2, 4\}$  است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

توجه کنید اگر از اعضای مجموعه  $\mathbb{Z}$  قدرمطلق بگیریم، همه اعضای آن مثبت یا صفر می شوند یعنی  $|\mathbb{Z}| = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  بنابراین:

$$B = \{2^{|x|} \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \dots\} = \{1, 2, 4, 8, \dots\}$$

از طرفی در مورد  $A$  داریم:

$$A = \{2^x \mid x \in \mathbb{N}\} = \{2^1, 2^2, 2^3, \dots\} = \{2, 4, 8, \dots\}$$

و در نتیجه  $B - A$ ، مجموعه تک عضوی  $\{1\}$  است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

اعضای مجموعه های  $A$  و  $B$  را می نویسیم:

$$A = \left\{ \frac{4-n}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n < 5 \right\}$$

$$= \left\{ \frac{4-1}{1}, \frac{4-2}{2}, \frac{4-3}{3}, \frac{4-4}{4} \right\} = \left\{ 3, 1, \frac{1}{3}, 0 \right\}$$

$$B = \left\{ \frac{4n-n^2}{n+2} \mid n \in \mathbb{N}, n \leq 4 \right\}$$

$$= \left\{ \frac{4-1}{1+2}, \frac{4(2)-2^2}{2+2}, \frac{4(3)-3^2}{3+2}, \frac{4(4)-4^2}{4+2} \right\}$$

$$= \left\{ 1, 1, \frac{3}{5}, 0 \right\} = \left\{ 1, \frac{3}{5}, 0 \right\}$$

$$A \cup B = \left\{ 3, 1, \frac{1}{3}, 0, \frac{3}{5} \right\}$$

$$A \cap B = \{0, 1\}$$

$$(A \cup B) - (A \cap B) = \left\{ 3, \frac{1}{3}, \frac{3}{5} \right\}$$

مجموعه  $(A \cup B) - (A \cap B)$  دارای ۳ عضو است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

نمودار این دو مجموعه به یکی از حالت های زیر می تواند باشد:



۱ زیر مجموعه  $A$  باشد  
و فقط عضو  $A$  باشد.

۲ زیر مجموعه  $B$  باشد  
و فقط عضو  $B$  باشد.

بنابراین **گزینه ۱ و ۲** همواره درست نیستند در هر دو حالت داریم:

$$\{1\} \subseteq (B - A) \cup (A - B)$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

**یادآوری:** تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه  $\mathbb{N}$  عضوی  $2^{\mathbb{N}}$  است.

اگر به اعضای یک مجموعه  $\mathbb{N}$  عضوی یک عضو دیگر اضافه کنیم، تعداد اعضای آن  $\mathbb{N} + 1$  می گردد پس اگر قبلاً تعداد زیرمجموعه ها  $2^{\mathbb{N}}$  بوده، تعداد زیرمجموعه های مجموعه جدید  $2^{\mathbb{N}+1}$  است.

$$\frac{2^{\mathbb{N}+1}}{2^{\mathbb{N}}} = \frac{2^{\mathbb{N}} \times 2^1}{2^{\mathbb{N}}} = 2$$

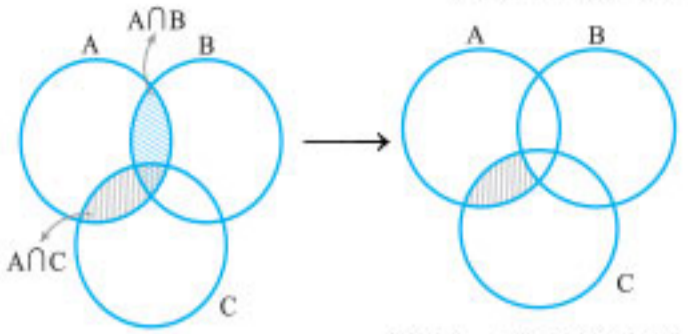
۱ ۲ ۳ ۴ ۵

با توجه به این که همه گزینه ها شامل  $A \cap B \cap C$  یعنی قسمت مشترک سه مجموعه هستند، بهتر است در هر گزینه فقط قسمت های متفاوت را بررسی کنیم.

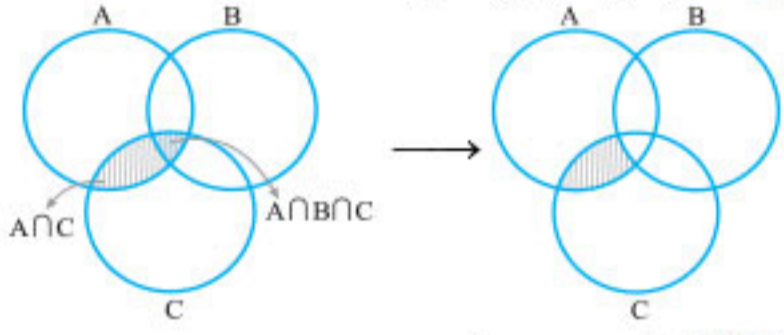




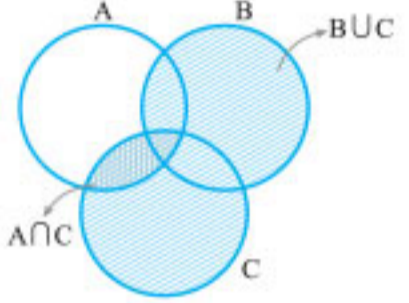
گزینه ۱:  $A \cap C - (A \cap B)$



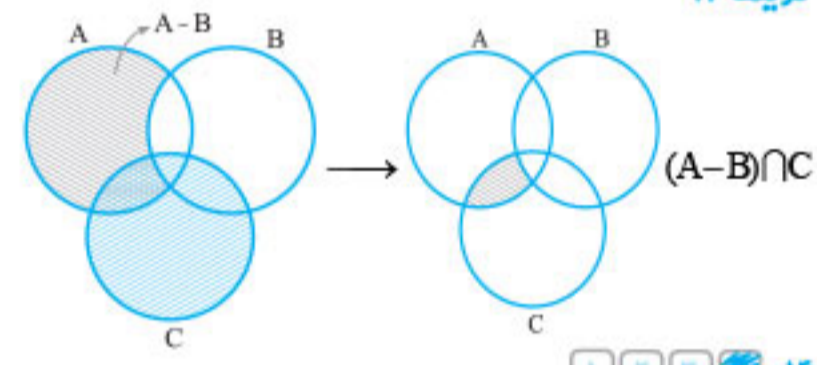
گزینه ۲:  $A \cap C - (A \cap B \cap C)$



گزینه ۳: با توجه به نمودار،  $(A \cap C) - (B \cup C) = \emptyset$



گزینه ۴:



۱۴. ۱ ۲ ۳ ۴

راهنما

برخی از قوانین جبر مجموعه‌ها

$\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$  خاصیت جابه‌جایی:

$\begin{cases} A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \end{cases}$  خاصیت شرکت‌پذیری:

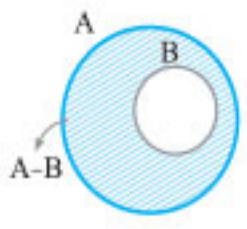
$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$  خاصیت پخش:

$\begin{cases} A \cup (A \cap B) = A \\ A \cap (A \cup B) = A \end{cases}$  قوانین جذب:

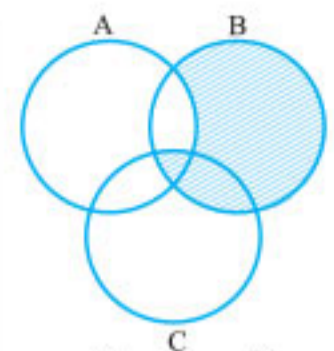
(زیرا  $(A \cap B) \subseteq A$ )

$\begin{cases} A \cup B = B \\ A \cap B = A \end{cases}$  اگر  $A \subseteq B$  باشد، آن‌گاه:

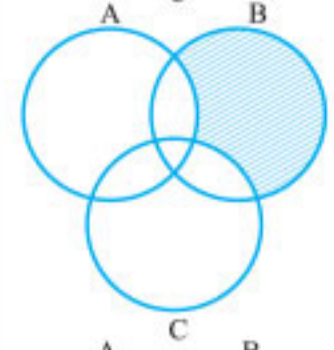
از آن‌جایی که  $A \cup B = A$  است، بنابراین  $B \subseteq A$  است. حال به کمک نمودار، حاصل عبارت خواسته شده را می‌یابیم.



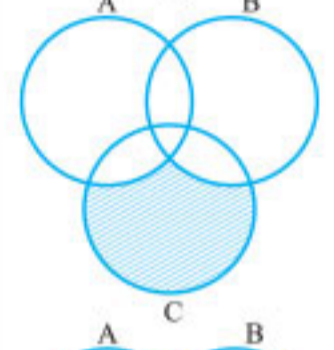
از آن‌جایی که  $B \subseteq A$ ، پس  $A \cap B = B$  است. کافی است  $A - B$  را هاشور بزنیم.



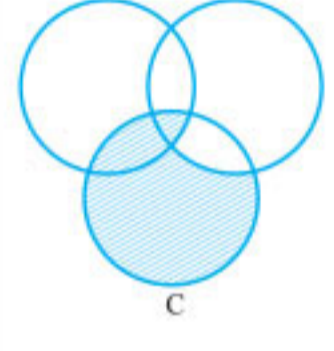
گزینه ۱:  $B - (A - C)$



گزینه ۲:  $(B - A) - C$



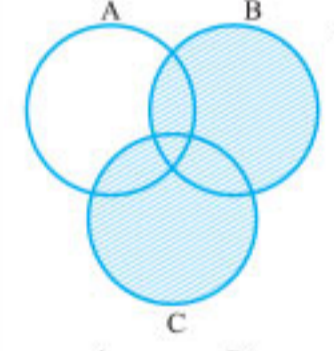
گزینه ۳:  $(C - B) - A$



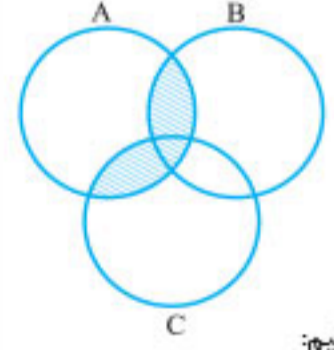
گزینه ۴:  $C - (B - A)$

۱۲. ۱ ۲ ۳ ۴

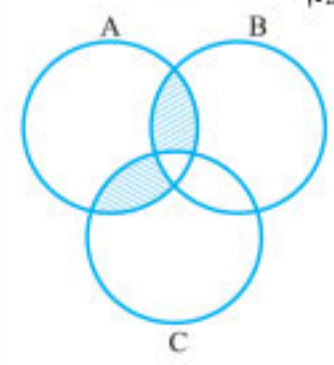
مراحل رسم نمودار را به ترتیب جلو می‌بریم: ابتدا  $B \cup C$  را رسم می‌کنیم:



سپس  $A \cap (B \cup C)$  را رسم می‌کنیم:



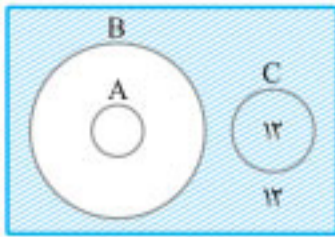
حالا از این مجموعه،  $B \cap C$  را کم می‌کنیم:



$A \cap (B \cup C) - (B \cap C)$

۱۳. ۱ ۲ ۳ ۴

به ترتیب نمودار همه گزینه‌ها را رسم می‌کنیم.



حال به کمک نمودارها مجموعه مقابل را هاشور می‌زنیم:  
 $((A \cup B) - C)'$   
 با توجه به این که  $A \subseteq B$   
 است می‌توان گفت:  $A \cup B = B$

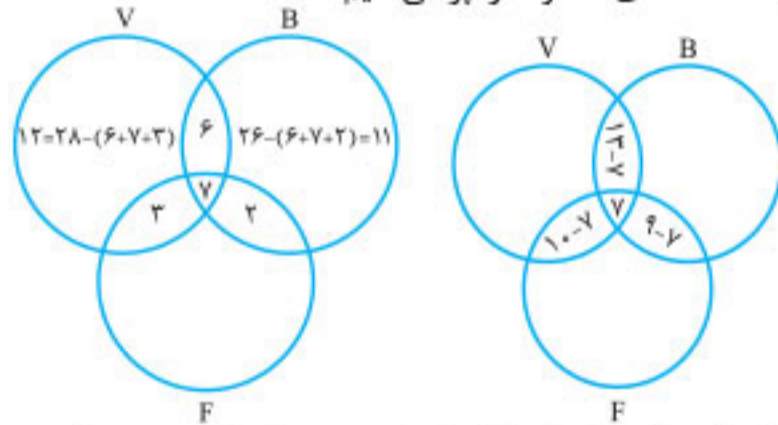
با توجه به این که  $((A \cup B) - C)'$  قسمت هاشور خورده می‌باشد، تعداد اعضای آن مشتمل برابر  $12 + 12 = 24$  است. که 12 عدد مربوط به خود مجموعه C و 12 عدد مربوط به مجموعه خارج C می‌باشد.

**روش دوم:** به کمک جبر مجموعه‌ها

$$\begin{aligned} & ((A \cup B) - C)' \frac{A \subseteq B}{A \cup B = B} (B - C)' \\ & = (B \cap C)' \frac{B \subseteq C'}{B \cap C' = B} n(B') = n(U) - n(B) = 30 - 6 = 24 \end{aligned}$$

۹۴

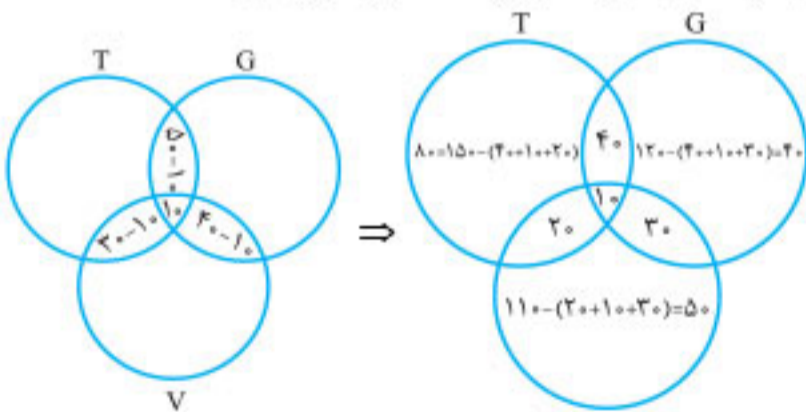
برای حل سؤالات سه مجموعه‌ای، بهترین کار رسم نمودار است. مجموعه والیبالی را با V، مجموعه بسکتبال را با B و مجموعه فوتبال را با F نمایش می‌دهیم. ابتدا قسمت‌های مشترک را پر می‌کنیم:



حال برای یافتن X باید تمام اعداد موجود را با هم جمع کرده و از 60 کم کنیم.  
 $X = 60 - (12 + 11 + 3 + 7 + 2 + 6) = 19$

۹۵

مجموعه خریداران تابلو را با T، مجموعه خریداران گل را با G و مجموعه خریداران گلدان را با V نمایش می‌دهیم.



تعداد کسانی که فقط تابلو خریده‌اند  $80 =$   
 تعداد کسانی که فقط گل خریده‌اند  $40 =$   
 تعداد کسانی که فقط گلدان خریده‌اند  $50 =$

تعداد کسانی که دقیقاً یک خرید انجام داده‌اند  $80 + 40 + 50 = 170$

۹۶

روزنامه دیواری  $n(B) = 12$ ، ورزش  $n(A) = 16$ ،  $n(S) = 29$

$$n(A - B) = 9 \Rightarrow \frac{n(A) - n(A \cap B)}{16} = 9$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = 7$$

$$43 = 25 + 20 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 12$$

حال با داشتن تعداد اعضای مشترک می‌توانیم تعداد اعضای  $A - B$  را بیابیم:  
 $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 25 - 12 = 13$

۹۱

**نکته:** اگر تعداد اعضای مجموعه‌های A و U (مرجع) را به ترتیب با  $n(A)$  و  $n(U)$  نمایش دهیم، برای یافتن تعداد اعضای مجموعه  $A'$  از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$n(A') = n(U) - n(A)$$

به کمک نکته فوق تعداد اعضای مجموعه B را محاسبه می‌کنیم:

$$n(B') = 60 \Rightarrow n(U) - n(B) = 60$$

$$\Rightarrow 100 - n(B) = 60 \Rightarrow n(B) = 40$$

حال تعداد اعضای مجموعه اجتماع را می‌یابیم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow n(A \cup B) = 60 + 40 - 20 = 80$$

و مجدداً به کمک رابطه تعداد اعضای مجموعه متمم داریم:

$$n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = 100 - 80 = 20$$

۹۲

مجموعه دانش‌آموزان دارای برادر را با B و مجموعه دانش‌آموزان دارای خواهر را با S نمایش می‌دهیم. اشتراک این دو مجموعه از تهی تا 12 نفر می‌تواند باشد. بنابراین تعداد اعضای مجموعه اجتماع عبارت است از:

$$n(B \cup S) = n(B) + n(S) - n(B \cap S)$$

$$n(B \cup S) = 12 + 14 - n(B \cap S)$$

طبق آنچه گفته شد  $0 \leq n(B \cap S) \leq 12$  است.

پس  $14 \leq n(B \cup S) \leq 26$  و چون X تعداد افراد تک فرزندی است لذا تعداد اعضای X همان  $n(B \cup S)'$  است.

$$X = n(B \cup S)' = n(U) - n(B \cup S) = 30 - n(B \cup S)$$

با قرار دادن کمترین و بیشترین مقدار  $n(B \cup S)$  یعنی 14 و 26 می‌توان حدود X را پیدا کرد.

$$X = 30 - 14 = 16$$

$$\Rightarrow 4 \leq X \leq 16$$

$$X = 30 - 26 = 4$$

۹۳

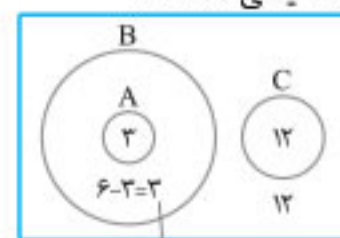
**روش اول:** می‌دانیم A زیر مجموعه B است و هر دوی این‌ها زیر مجموعه C' هستند.

**نکته:** اگر  $A \subseteq B'$  باشد، به آن معنی است که دو مجموعه A و B جدا از هم هستند و هیچ اشتراکی ندارند.

با توجه به نکته درمی‌یابیم که دو مجموعه A و B هیچ اشتراکی با C ندارند.

به کمک این اطلاعات نمودار سه مجموعه را رسم می‌کنیم.

به کمک نمودار متوجه می‌شویم تعداد اعضای داخل مجموعه‌های A و B برابر  $3 + 3 + 12 = 18$  است، بنابراین تعداد اعضای خارج این سه مجموعه  $30 - 18 = 12$  است.

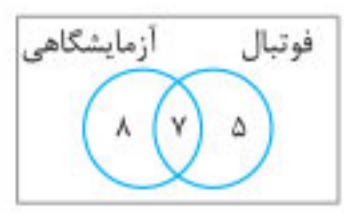


تعداد اعضای خالص B:  $n(B - A)$

$$n(A' \cap B') = n(S) - n(A \cup B) = 39 - (16 + 12 - 7) = 39 - 21 = 18$$

۱۲۳ ۹۷

مجموع تعداد حاضران در دو گروه ۲۰ نفر است. در مجموع ۲۲ نفر عضو هیچ گروهی نیستند.



۱۲۳۴ ۹۸

تعداد دایره‌ها را در هر مرحله می‌شماریم:

شماره جمله: (۱) (۲) (۳)  
تعداد نقاط: ۴, ۷, ۱۰, ...  
می‌توان فهمید که در هر مرحله ۳ واحد به تعداد قبلی اضافه می‌شود و می‌توان شماره جمله را به تعداد نقاط به روش زیر ربط داد.

(۱) (۲) (۳)  
 $3(1)+1, 3(2)+1, 3(3)+1, \dots$   
بنابراین جمله  $n$ ام برابر  $3n+1$  است و اگر برابر ۸۲ باشد، داریم:  
 $3n+1=82 \Rightarrow 3n=81 \Rightarrow n=27$   
یعنی در بیست و هفتمین مرحله، تعداد دایره‌ها برابر ۸۲ می‌گردد.

۱۲۳۴ ۹۹

تعداد چوب کبریت‌ها را در مراحل نشان داده شده، می‌شماریم.  
(۱) (۲) (۳)  
۴, ۱۰, ۱۶, ...

مشخص است هر جمله ۶ واحد از جمله قبلی بیشتر است. حال به کمک این جمله‌ها سعی می‌کنیم جمله  $n$ ام را حدس بزنیم.  
(۱) (۲) (۳) ... (n)  
 $6(1)-2, 6(2)-2, 6(3)-2, \dots, 6n-2$   
پس تعداد چوب کبریت‌ها در مرحله دهم برابر  $6(10)-2$  یعنی ۵۸ است.

۱۲۳۴ ۱۰۰

با شمارش چوب کبریت‌ها در سه مرحله داده شده به الگوی زیر دست می‌بایم.  
(۱) (۲) (۳)  
۴, ۱۰, ۱۸  
 $+6, +8$

همان‌طور که می‌بینید اختلاف جملات ۲ واحد، ۲ واحد در حال افزایش است یعنی می‌توان جملات بعدی را حدس زد.

۴, ۱۰, ۱۸, ۲۸, ۴۰, ۵۴, ۷۰  
۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۴, ۱۶  
جمله هفتم دنباله برابر ۷۰ است.

دقت کنید که بعد از تدریس موضوع دنباله در مباحث بعدی روش‌های بهتری برای یافتن جمله عمومی الگوی درجه دوم ارائه می‌شود. 😊

۱۲۳۴ ۱۰۱

تعداد پاره‌خط‌ها را در سه مرحله داده شده می‌شماریم.  
(۱) (۲) (۳)  
۶, ۱۱, ۱۶  
مشاهده می‌کنید که در هر مرحله پنج واحد به قبلی اضافه می‌شود و می‌توانیم جمله  $n$ ام آن را حدس بزنیم:  $5n+1$   
بنابراین جمله دهم برابر  $5(10)+1$  یعنی ۵۱ است.

۱۲۳۴ ۱۰۲

تعداد نقاط در ۳ مرحله داده شده را می‌نویسیم:  
(۱) (۲) (۳)  
۴, ۹, ۱۶  
 $+5, +7$

می‌بینید که اختلاف جملات ۲ تا، ۲ تا در حال افزایش است و می‌توان حدس زد که این الگو یک دنباله درجه دوم است که در بخش دنباله‌ها بیشتر در مورد آن توضیح خواهیم داد.

حال به کمک قاعده و الگوی پیدا شده جمله دهم را پیدا می‌کنیم.  
(۱) (۲) (۳) (۴) (۵) (۶) (۷) (۸) (۹) (۱۰)  
۴, ۹, ۱۶, ۲۵, ۳۶, ۴۹, ۶۴, ۸۱, ۱۰۰, ۱۲۱  
۵, ۷, ۹, ۱۱, ۱۳, ۱۵, ۱۷, ۱۹, ۲۱  
۱۲۳۴ ۱۰۳

تعداد نقاط هر گزینه را در هر مرحله می‌نویسیم.

الف: (۱) (۲) (۳)  
۱, ۶, ۱۵  
۵, ۹

ب: (۱) (۲) (۳)  
۱, ۵, ۹  
 $+4, +4$

پ: (۱) (۲) (۳)  
۵, ۱۰, ۱۸  
 $+5, +8$

ت: (۱) (۲) (۳)  
۴, ۸, ۱۲  
 $+4, +4$

دنباله خطی، دنباله‌ای است که اختلاف جملات آن ثابت باشد که فقط قسمت **ب** و **ت** دارای این خاصیت می‌باشند.

۱۲۳۴ ۱۰۴

از آن جایی که اختلاف جملات متوالی  $-3$  است، پس ضریب  $n$  در الگوی  $t_n = an + b$  برابر  $-3$  است و یعنی  $a = -3$  می‌باشد.  
 $t_n = -3n + b$

حال می‌دانیم جمله دهم برابر  $-100$  است.  
 $t_{10} = -3(10) + b = -100 \Rightarrow b = -70$

پس جمله عمومی الگو به‌طور کامل پیدا شد.  
 $t_n = -3n - 70$   
برای پیدا کردن جمله سوم کافی است به  $n$  مقدار ۳ را بدهیم.  
 $t_3 = -3(3) - 70 = -79$

۱۲۳۴ ۱۰۵

اختلاف جملات الگو را محاسبه می‌کنیم:

۳, ۸, ۱۵, ۲۴, ...  
 $+5, +9$

دنباله اختلافات  $5, 7, 9, \dots$  خود یک الگوی خطی است.

دنباله خطی اختلافات  $5, 7, 9, \dots$  دو تا دو تا اضافه می‌شود و نصف آن ضریب  $n^2$  است پس جمله  $n$ ام دنباله به صورت  $n^2 + bn + c$  است. حال باید دو مجهول  $b$  و  $c$  را بیابیم. برای یافتن دو مجهول باید دو معادله داشته باشیم کافی است یک‌بار به  $n$  عدد یک را بدهیم و برابر ۳ بگذاریم و یک‌بار به  $n$  عدد ۲ بدهیم و برابر ۸ بگذاریم.

$$t_n = n^2 + bn + c \Rightarrow \begin{cases} (1)^2 + b(1) + c = 3 \\ (2)^2 + b(2) + c = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b+c=2 \\ 2b+c=4 \end{cases} \Rightarrow b=2 \Rightarrow c=0$$

بنابراین دنباله به صورت  $t_n = n^2 + 2n$  است.

همه جمله‌ها را از فرمول  $t_n = t_1 + (n-1)d$  باز می‌کنیم:

$$t_1 + t_4 + t_7 = 12 \Rightarrow t_1 + (t_1 + 3d) + (t_1 + 6d) = 12$$

$$\Rightarrow 3t_1 + 9d = 12 \xrightarrow{\text{تقسیم طرفین بر ۳}} t_1 + 3d = 4$$

عبارت دوم را نیز به همین روش باز می‌کنیم:

$$t_4 + t_7 + t_{10} = 30 \Rightarrow (t_1 + 3d) + (t_1 + 6d) + (t_1 + 9d) = 30$$

$$\Rightarrow 3t_1 + 18d = 30 \xrightarrow{\text{تقسیم طرفین بر ۳}} t_1 + 6d = 10$$

از طریق دستگاه، مجهول‌های  $d$  و  $t_1$  را می‌یابیم.

$$\begin{cases} t_1 + 3d = 4 \\ t_1 + 6d = 10 \end{cases}$$

$$3d = 6 \Rightarrow d = 2 \Rightarrow t_1 = -2$$

در نتیجه جمله دوم عبارت است با:  $t_2 = t_1 + d = (-2) + 2 = 0$

ابتدا عبارت سمت چپ را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$t_{2p}^2 - t_1^2 = kt_{2p} \Rightarrow (t_{2p} - t_1)(t_{2p} + t_1) = kt_{2p}$$

با توجه به فرمول  $d = \frac{t_m - t_n}{m - n}$  می‌توان گفت:

$$t_{2p} - t_1 = (2p - 1)d \Rightarrow t_{2p} - t_1 = 2pd$$

از طرفی طبق نکته گفته شده در درس‌نامه در مورد جملات متساوی الفاصله از طرفین، از آن جایی که  $26 + 10 = 22 + 22$  می‌باشد، می‌توان گفت:

$$t_{2p} + t_1 = t_{2p} + t_{2p} \Rightarrow t_{2p} + t_1 = 2t_{2p}$$

حالا این مقادیر را در عبارت تجزیه شده صورت سؤال قرار می‌دهیم:

$$(t_{2p} - t_1)(t_{2p} + t_1) = kt_{2p} \Rightarrow (2pd)(2t_{2p}) = kt_{2p}$$

$$\Rightarrow 52d t_{2p} = kt_{2p} \xrightarrow{d=2} 52(2) = k \Rightarrow k = 104$$

### راهنما

هرگاه مجموع و حاصل ضرب تعدادی فرد از جملات متوالی یک دنباله حسابی را بدهند، به جای این که جملات را  $t_1, t_2, \dots$  در نظر بگیریم بهتر است جمله وسط را  $t$  در نظر بگیریم و جمله‌های قبلی و بعدی را با کاستن و افزودن  $d$  بیابیم مانند:

$$\dots, t - 2d, t - d, t, t + d, t + 2d, \dots$$

سه جمله را  $t - d, t, t + d$  در نظر می‌گیریم:

$$(t - d) + t + (t + d) = 24 \Rightarrow 3t = 24 \Rightarrow t = 8$$

بنابراین می‌توان در مورد حاصل ضرب سه جمله گفت:

$$(8 - d) \times 8 \times (8 + d) = 120 \Rightarrow (8 - d)(8 + d) = 15$$

$$\Rightarrow 64 - d^2 = 15 \Rightarrow d^2 = 49 \Rightarrow d = \pm 7$$

**روش اول:** هر یک از جدول‌ها را دنباله حسابی جداگانه‌ای در نظر می‌گیریم:

در جدول بالا دنباله‌ای با جمله اول  $t_1 = 20$  و  $t_5 = 80$  داریم:

$$d = \frac{t_m - t_n}{m - n} = \frac{80 - 20}{5 - 1} = \frac{60}{4} = 15$$

$$\Rightarrow A = t_p = t_1 + d = 20 + 15 = 35$$

در جدول پایین دنباله‌ای با جمله اول  $t_1 = 20$  و  $t_7 = 80$  داریم:

$$d = \frac{t_m - t_n}{m - n} = \frac{80 - 20}{7 - 1} = \frac{60}{6} = 10$$

$$\Rightarrow B = t_5 = t_1 + 4d = 20 + 4(10) = 60$$

$$\Rightarrow B - A = 60 - 35 = 25$$

**روش دوم:** در جدول بالا ۳ واسطه حسابی بین ۸۰ و ۲۰ قرار داریم:

$$d = \frac{b - a}{m + 1} = \frac{80 - 20}{3 + 1} = \frac{60}{4} = 15$$

جملات دنباله برابرند با:  $20, 35, 50, 65, 80 \Rightarrow A = 35$

به همین صورت در جدول پایین داریم:

$$d = \frac{b - a}{m + 1} = \frac{80 - 20}{5 + 1} = \frac{60}{6} = 10$$

بنابراین جملات دنباله برابرند با:

$$20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 \Rightarrow B = 60$$

$$\Rightarrow B - A = 60 - 35 = 25$$

اگر بین  $a$  و  $b$  تعداد  $m$  واسطه حسابی درج کنیم قدرنسبت از فرمول

$$d = \frac{b - a}{m + 1}$$

با توجه به این که در این سؤال اختلاف دو جمله ۸۴۰ است، پس  $b - a = 840$  و  $m = 5$  می‌باشد، بنابراین:

$$d = \frac{b - a}{m + 1} = \frac{840}{5 + 1} = \frac{840}{6} = 140$$

فرض می‌کنیم بین ۸ و ۶۳ تعداد  $m$  عدد قرار داده‌ایم که همگی با هم تشکیل دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت  $d$  داده‌اند:

$$8, \underbrace{8 + d, \dots, 63 - d}_{(m-2)}, 63$$

قدرنسبت این دنباله برابر است با:

$$d = \frac{63 - 8}{m + 1} = \frac{55}{m + 1}$$

از طرفی اولین عدد قرار داده شده  $8 + d$  و آخرین عدد قرار داده شده  $63 - d$  است که اختلاف آن‌ها طبق صورت سؤال برابر ۲۳ است.

$$(63 - d) - (8 + d) = 23 \Rightarrow 55 - 2d = 23$$

$$\Rightarrow 2d = 22 \Rightarrow d = 11$$

حال با داشتن جمله اول  $t_1 = 8$  و قدرنسبت  $d = 11$  می‌توان جمله پنجم را به راحتی محاسبه نمود:

$$t_5 = t_1 + 4d = 8 + 4(11) = 8 + 44 = 52$$

### راهنما

تعداد اعضای دنباله‌ای با قدرنسبت  $d$ ، که از جمله  $a$  شروع و به جمله  $b$  ختم می‌شود از فرمول زیر به دست می‌آید.

$$n = \frac{b - a}{d} + 1$$

اعداد طبیعی که در تقسیم بر ۷ باقی‌مانده‌ای برابر ۵ دارند از رابطه  $t_n = 7n + 5$  به دست می‌آیند که دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت ۷ می‌باشد.

حال اولین عدد سه رقمی این دنباله را می‌یابیم:

$$\begin{array}{r} 100 \mid 7 \\ - \quad 7 \quad 14 \\ \hline 30 \\ - \quad 28 \\ \hline 2 \end{array}$$

